Matematyka
Lista 1

Definicja. Dla dwóch dowolnych niepustych zbiorów A, B zbiór uporządkowanych par

$$\{(a,b): \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

będziemy oznaczać $A \times B$ i nazywać *produktem kartezjańskim zbiorów* A, B. Jeśli $A = B$ to stosuje się skrótowy zapis $A^2 = A \times A$.

Przykład. Punkty płaszczyzny określa się jednoznacznie za pomocą par liczb rzeczywistych (współrzędnych) tworząc dwie, przecinające się pod kątem prostym osie. Zatem płaszczyznę można traktować jako produkt kartezjański $\mathbf{R}^2$.

Zad 1. Przyjmując, że punkty płaszczyzny są uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych, wyznaczyć $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów

a) $A = \{x : 1 < x < 3\}, \qquad B = \{y : 0 < y < 2\},$

b) $A = \{x : x = 2\}, \qquad B = \{y : -1 < y < 1\},$

c) $A = \{x : x = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}, \qquad B = \{y : y = 2\},$

d) $A = \{x : |x-2| > 3\}, \qquad B = \{y : |y+2| \leq 3\},$

e) $A = \{x : \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8} \geq 0\}, \qquad B = \{y : 0 < |y-1| < 5\}.$

Zad 2. Wypisać elementy produktu $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów

a) $A = \{0,1\}, \qquad B = \{0,1\},$

b) $A = \{1\}, \qquad B = \{0,1,2\},$

c) $A = \{1,1\}, \qquad B = \{2,3\},$

Zad 3. Obliczyć liczbę elementów w zbiorze $A \times B$ jeśli zbiór A jest n-elementowy, a zbiór B jest m-elementowy.

Zad 4. Sprawdzić czy prawdziwe są równości

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$

c) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C),$

d) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C),$

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$

Definicja. *Relacją* ρ określoną na elementach niepustych zbiorów A, B, nazywamy każdy podzbiór produktu kartezjańskiego tych zbiorów. Czyli ρ jest relacją, jeśli $\rho \subset A \times B$. Ponadto, jeśli $(a,b) \in \rho$, to będziemy mówili, że element a jest w relacji z elementem b.

Przykład. Równoległość w zbiorze prostych jest relacją. Mianowicie, niech A będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie i rozważmy relację $\rho \subset A \times A$ daną warunkiem

$$(x,y) \in \rho \iff \text{prosta } x \text{ jest równoległa do prostej } y.$$

Definicja. Relację $\rho \subset X \times Y$ nazywamy *funkcją* określoną na zbiorze X, o wartościach ze zbioru Y, gdy spełnione są warunki

$$\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} (x, y) \in \rho,$$

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y_1, y_2 \in Y} (x, y_1) \in \rho \ \wedge \ (x, y_2) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_2.$$

Tradycyjnie dla oznaczenia funkcji będziemy używać liter f, g, h, ... W miejsce $(x, y) \in f$ piszemy częściej $y = f(x)$. Natomiast napis $f : X \to Y$ czytamy „f odwzorowuje X w Y. Ponadto zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, a zbiór

$$f(X) = \{y : \bigvee_{x \in X} y = f(x)\}$$

nazywamy *przeciwdziedziną* (lub też *obrazem*) funkcji f.

Przykład. Niech X oznacza zbiór artykułów w wybranym sklepie, a Y zbiór cen tych artykułów. Każdemu artykułowi przyporządkowana jest jedna cena, a więc ustala ona pewną funkcję $f : X \to Y$.

Zad 5. Sprawdzić która z relacji jest funkcją:

a) $\rho \subset \mathbf{R}^2, \qquad (x, y) \in \rho \iff x^2 = y^2,$

b) $\rho \subset [0, \infty) \times \mathbf{R}, \qquad (x, y) \in \rho \iff y^2 = 2x,$

c) $\rho \subset \mathbf{N}^2, \qquad (x, y) \in \rho \iff x|y$, ($x|y$ oznacza, że y jest podzielne przez x)

d) $\rho \subset \mathbf{N}^2, \qquad (x, y) \in \rho \iff 2|(x + y),$

e) $\rho \subset \mathbf{R}^2, \qquad (x, y) \in \rho \iff xy = 4,$

f) $\rho \subset \mathbf{C}^2, \qquad (x, y) \in \rho \iff x^2 + y^2 - 9 = 0,$

g) $\rho \subset [-1, 1] \times \mathbf{R}, \qquad (x, y) \in \rho \iff x^2 + y^2 - 1 = 0,$

Definicja. Rozważmy funkcje $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Wtedy wzór

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

określa nową funkcję $g \circ f : X \to Z$ nazywaną *funkcją złożoną* lub też *funkcją superponowaną* (z funkcji g i f).

Zad 6. Dane są funkcje $f(x) = x^3 - x$ i $g(x) = \sin 2x$. Znaleźć:

a) $f\Big(g\big(\frac{\pi}{12}\big)\Big)$, b) $g\big(f(1)\big)$, c) $g\big(f(2)\big)$, d) $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

Zad 7. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Znaleźć: $f\big(f(x)\big)$, $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$.

Zad 8. Znaleźć: $f\big(f(x)\big)$, $g\big(g(x)\big)$, $f\big(g(x)\big)$, $g\big(f(x)\big)$, jeśli:

a) $f(x) = x^2, \quad$ i $\quad g(x) = 2^x,$

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, gdzie $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$, i $g(x) = \frac{1}{x}$.

Zad 9. Następujące funkcje złożone przedstawić za pomocą związków utworzonych z podstawowych funkcji elementarnych:

a) $y = \sin^3 x$, b) $y = \sqrt[3]{(1+x^2)}$, c) $y = \log \operatorname{tg} x$, d) $y = 5^{(3x+1)^2}$.

Definicja. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *iniekcją* (odwzorowaniem *różnowartościowym*), gdy spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

i piszemy wtedy $f : X \xrightarrow{1-1} Y$.
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *suriekcją* (odwzorowaniem *„na”*), gdy $f(X) = Y$ i piszemy wtedy $f : X \underset{\text{na}}{\longrightarrow} Y$.
Bijekcja jest to odwzorowanie będące jednocześnie iniekcją i suriekcją. Inaczej mówimy, że jest to odwzorowanie *wzajemnie jednoznaczne*. Oznaczamy je przez $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$.

Zad 10. Zbadać czy dane odwzorowanie jest iniekcją, suriekcją, lub bijekcją:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x$,

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^3$,

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,

d) $f : \mathbf{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$,

e) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$,

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$,

g) $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$,

h) $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, $f((n, m)) = n + m$,

i) $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, $f((n, m)) = nm$,

j) $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, $f((n, m)) = n^2 m$,

k) $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, $f((n, m)) = \max(n, m)$.

Definicja. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją i rozważmy relacje

$$f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y, \qquad f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in X\} \subset Y \times X.$$

Relacja f^{-1} jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją i wtedy f^{-1} nazywamy *funkcją odwrotną do f*.

Innymi słowy, jeśli funkcja $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ jest bijekcją, to dla każdej wartości $y_0 \in Y$ istnieje dokładnie jedna wartość $x_0 \in X$ taka, że $f(x_0) = y_0$. Zatem na zbiorze Y mamy określoną funkcję $x = f^{-1}(y)$, którą nazywamy *funkcją odwrotną* do funkcji $y = f(x)$.
Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności funkcji odwrotnej

1) $f: Y \to X$ jest też bijekcją

2) $(f^{-1})^{-1} = f$,

3) $f(f^{-1}(y)) = y$, dla $y \in Y$,

4) $f^{-1}(f(x)) = x$, dla $x \in X$,

5) jeżeli $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ są bijekcjami, to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Przykłady ważniejszych funkcji odwrotnych.

1) Jeśli $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, to $f: \mathbf{R} \longrightarrow (0, \infty)$ jest bijekcją oraz $f^{-1}(x) = \log_a x$.

2) Jeśli $f(x) = \sin x$, to $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-1, 1)$ jest bijekcją oraz $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

3) Jeśli $f(x) = \cos x$, to $f: (0, \pi) \longrightarrow (-1, 1)$ jest bijekcją oraz $f^{-1}(x) = \arccos x$.

4) Jeśli $f(x) = \operatorname{tg} x$, to $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbf{R}$ jest bijekcją oraz $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

5) Jeśli $f(x) = \operatorname{tg} x$, to $f: (0, \pi) \longrightarrow \mathbf{R}$ jest bijekcją oraz $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Zad 11. Wyznaczyć funkcję odwrotną i sporządzić wykresy obu funkcji na jednym układzie współrzędnych

a) $y = 3x + 1$, gdzie $x \in (-\frac{1}{3}, \infty) \ \wedge \ y \in (0, \infty)$,

b) $y = -2x + 1$, gdzie $x \in (-\infty, 0] \ \wedge \ y \in [1, \infty)$,

c) $y = x^2$, gdzie $x \in (-\infty, -1) \ \wedge \ y \in (1, \infty)$,

d) $y = -x^2 - 1$, gdzie $x \in (0, \infty) \ \wedge \ y \in (-\infty, -1)$,

e) $y = x^2 + 2x + 2$, gdzie $x \in [-1, \infty) \ \wedge \ y \in [1, \infty)$,

f) $y = -\sqrt{-x-1} + 1$, gdzie $x \in (-\infty, -1) \ \wedge \ y \in (-\infty, 1)$,

g) $y = \log(x + 1)$, gdzie $x \in (-1, \infty) \ \wedge \ y \in \mathbf{R}$,

h) $y = (\frac{1}{2})^{x+1}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \ \wedge \ y \in (0, \infty)$,

i) $y = \frac{x+1}{x-1}$, gdzie $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

j) $y = 3^{x-1}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \ \wedge \ y \in (0, \infty)$.